



Penerapan *Finite Element Method* Pada Pemodelan Piringan Galaksi: *Mestel Model, Piffl Model*

Riska Wahyu Romadhonia¹

¹Jurusan Sains, Institut Teknologi Sumatera, Lampung Selatan, 35365, Indonesia

Metode elemen hingga, atau lebih dikenal dengan *Finite Element Method* (FEM) merupakan metode yang banyak digunakan untuk pemecahan masalah fisika matematika. Dalam studi ini, FEM digunakan untuk menentukan mode ketidakstabilan piringan galaksi, yang dinyatakan sebagai pasangan frekuensi kompleks $\omega_e = (\Omega_p, s)$. Dengan melakukan aproksimasi deret Fourier pada persamaan solusi *Collisionless Boltzmann Equation* (CBE) dan mencari bobot Galerkin sebagai bentuk *weak-form* CBE, akan diperoleh persamaan eigen linier dengan nilai eigen yang bersesuaian merupakan nilai dari mode ketidakstabilan piringan galaksi. Untuk mengetahui performa dari FEM, dilakukan pemodelan piringan galaksi dengan model Mestel dan Piffl. Model Mestel digunakan sebagai tolak-ukur bahwa pemodelan FEM yang dilakukan benar, sedangkan untuk model Piffl merupakan model galaksi berdasarkan survey dari *Radial Velocity Experiment* (RAVE). Hasil pengolahan tersebut memperlihatkan kontur fungsi distribusi kerapatan (Σ_1) untuk dua nilai eigen ekstrim sebagai mode ketidakstabilan, dimana nilai eigen maksimum sebagai mode 1, dan nilai eigen minimum sebagai mode 2. Nilai (Ω_p, s) pada model Mestel sebesar (0.430, 0.127), sedangkan pada model Piffl diperoleh (152, 7) pada mode 1 dan (60, 11) pada mode 2.

Kata Kunci: *Finite Element Method*, galaksi: struktur, pemodelan piringan galaksi, *Mestel model*, *Piffl model*.

1. PENDAHULUAN

Asal mula pola spiral piringan galaksi merupakan salah satu pertanyaan fundamental dalam astrofisika. Pada studi ini, pendekatan yang ingin ditelusuri adalah untuk memahami evolusi piringan galaksi dengan menemukan mode ketidakstabilannya. Pada dasarnya, ide untuk menemukan mode ketidakstabilan piringan galaksi mulai dirintis oleh Kalnjas, Lin, Shu, dan peneliti lainnya pada awal tahun 1960. Teori gelombang kerapatan pada struktur spiral (*Density wave theory of the spiral structure*) menghasilkan minat yang luas dan menginspirasi berbagai penelitian terkait dinamika ketidakstabilan piringan galaksi [1]. Pola spiral akan secara otomatis terbentuk karena perkembangan gangguan kecil atau perturbasi pada awal distribusi

kesetimbangan bintang dan potensial gravitasi. Mode ketidakstabilan dari piringan galaksi dinyatakan dalam pasangan frekuensi kompleks ω_e . Bagian riil didefinisikan sebagai *pattern speed* Ω_p dan bagian imajiner didefinisikan sebagai *growth rate* s . *Pattern speed* Ω_p menyatakan seberapa cepat lengan spiral bergerak dalam arah radial, sedangkan untuk *growth rate* s menyatakan seberapa cepat evolusi lengan spiral jika terdapat gangguan. Dengan mengetahui nilai $\omega_s = (\Omega_p, s)$, evolusi beserta struktur piringan galaksi dapat dipelajari lebih lanjut. Dinamika sistem bintang mendekati kesetimbangan, salah satunya piringan galaksi, mengikuti persamaan Boltzmann tanpa-tabrakan (*Collisionless Boltzmann Equation*, CBE). Penentuan solusi umum dari CBE merupakan tantangan sendiri pada

*Email Address: riska.romadhonia@staff.itera.ac.id

astrofisika. Beberapa metode telah diusulkan dalam menyelesaikan CBE terlinierisasi. Metode yang paling sering digunakan adalah metode matriks [2, 3, 4].

Metode baru untuk menyelesaikan CBE menggunakan metode elemen hingga (*finite element method*, FEM) dalam melakukan aproksimasi fungsi potensial dan kerapatan permukaan (*surface density*) menjadi elemen lingkaran, dimana pada penelitian sebelumnya menggunakan ekspansi basis *biorthonormal* [5]. Ekspansi deret Fourier pada fungsi potensial perturbasi dan fungsi kerapatan permukaan, kemudian melakukan proyeksi Petrov-Galerkin yang mana merupakan bentuk *weak-form* dari CBE, dan mendapatkan persamaan eigen linier sebagai persamaan akhir yang harus diselesaikan. Frekuensi kompleks $\omega_e = (\Omega_p, s)$ merupakan solusi nilai eigen dari persamaan linier tersebut. Motivasi dalam penggunaan FEM adalah karena FEM mempunyai peranan penting dalam penelitian teknik, geofisika, dan dinamika fluida. Dengan mengembangkan metode ini pada astrofisika, diharapkan penelitian selanjutnya dapat terhubung langsung pada komputasi dinamika fluida, yang mana banyak menggunakan metode *finite difference* atau FEM, untuk mempelajari evolusi sekaligus interaksinya pada bintang dan gas di sekitar piringan galaksi.

2. METODOLOGI

2.1 *Collisionless Boltzmann Equation* (CBE)

Fungsi distribusi (*distribution function*, DF) dinotasikan sebagai f , merupakan probabilitas menemukan partikel (dalam kasus ini bintang) pada koordinat tertentu saat waktu tertentu. Koordinat yang sering digunakan pada sistem dinamika adalah koordinat ruang-fase, dimana posisi dan kecepatan digunakan sebagai koordinat. Koordinat ruang-fase memiliki 6-dimensi koordinat, dimana posisi $\vec{x} = (x_0, x_1, x_2)$ dan kecepatan $\vec{v} = (v_0, v_1, v_2)$, akan tetapi dengan piringan galaksi sebagai model utama studi ini, maka koordinat yang digunakan hanya 4-dimensi koordinat dengan posisi $\vec{x} = (x_0, x_1)$ dan kecepatan $\vec{v} = (v_0, v_1)$. Setiap bintang yang bergerak pada ruang-fase, maka kemungkinan menemukan bintang tersebut pada koordinat ruang-fase tertentu akan berubah terhadap waktu. Perlu adanya persamaan differensial yang memastikan bahwa saat DF berubah terhadap waktu, probabilitasnya selalu kekal. Kekekalan probabilitas ini dinamakan persamaan Boltzmann tanpa-tabrakan (*Collisionless Boltzmann Equation*, CBE). CBE dinyatakan dalam bentuk persamaan differensial [6]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{v} - \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \vec{x}} = 0 \quad (1)$$

dimana f adalah fungsi distribusi (bergantung pada posisi \vec{x} dan kecepatan \vec{v}) dan H adalah fungsi Hamiltonian. Kedua fungsi ini memenuhi persamaan:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}, \vec{v}, t) &= f_0(\vec{x}, \vec{v}) + f_1(\vec{x}, \vec{v}, t) \\ H(\vec{x}, \vec{v}, t) &= \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} + \Phi_0(\vec{x}) + \Phi_1(\vec{x}, t) \\ \Phi_1 &= -G \int \int \frac{\Sigma_1 d^2 x'}{|x' - x|} ; \Sigma_1 = \int \int f_1 d^2 \vec{v} \end{aligned} \quad (2)$$

dimana Φ adalah potensial gravitasi dan Σ_1 adalah kerapatan permukaan (*surface density*), dengan keterangan indeks 0 dan indeks 1 pada setiap parameter, secara berurutan menunjukkan saat ekuilibrium dan saat terjadinya perturbasi. Pada studi ini, koordinat yang digunakan adalah koordinat polar $\vec{x} = (r, \theta)$ dan kecepatan $\vec{v} = (v_r, v_\theta)$. Akan tetapi fungsi Hamiltonian lebih sering dinyatakan dalam koordinat aksi-sudut (*action-angle coordinates*) daripada koordinat polar. Transformasi kanonik $(\vec{x}, \vec{v}) \rightarrow (\vec{\omega}, \vec{J})$ didengan variabel aksi $\vec{J} = (J_r, J_\theta)$ dan variabel sudut $\vec{\omega} = (\omega_r, \omega_\theta)$. Dengan melakukan transformasi kanonik dari koordinat polar ke koordinat aksi-sudut, maka DF dan Hamiltonian pada persamaan (2) dapat dinyatakan sebagai:

$$\begin{aligned} f(\vec{\omega}, \vec{J}, t) &= f_0(\vec{J}) + f_1(\vec{\omega}, \vec{J}, t) \\ H(\vec{\omega}, \vec{J}, t) &= H_0(\vec{J}) + \Phi_1(\vec{\omega}, \vec{J}, t) \end{aligned} \quad (3)$$

2.2 *Finite Element Method* (FEM)

Perturbasi haruslah periodik, dan dapat diaproksimasi dengan deret Fourier. Ekspansi deret Fourier untuk beberapa parameter sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_1 &= Re \sum_{\vec{k}} f_{1k}(\vec{J}, t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{\omega}); f_{1k} = \sum_{n=1}^N E_k(n, \vec{J}) \cdot z_k(t) \\ \Phi_1 &= Re \sum_{\vec{k}} h_{1k}(\vec{J}, t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{\omega}); h_{1k} = \sum_{n=1}^N \Psi_k(n, \vec{J}) \cdot a_k(t) \end{aligned} \quad (4)$$

Pada dimensi posisi polar, ruang dibagi menjadi N elemen lingkaran dengan setiap lingkaran terdapat N_d nodal, sehingga Φ_1, Σ_1 pada koordinat polar diaproksimasi sebagai:

$$\begin{aligned} \Phi_1(r, \theta, t) &= Re \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^N H_n(r) G_n a_n \exp(im\theta) \\ \Sigma_1(r, \theta, t) &= Re \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^N H_n(r) G_n b_n \exp(im\theta) \end{aligned} \quad (5)$$

dimana m merupakan banyak lengan spiral (dalam studi ini, digunakan $m = 2$). Fungsi $H_n(r)$ bernilai 1 jika terletak di dalam lingkaran $r_n \leq r \leq r_{n+1}$ dan bernilai nol jika sebaliknya. Fungsi G_n merupakan fungsi bentuk (*shape function*), variabel \vec{k} adalah vektor dari angka Fourier, dan a_n, b_n, z_k merupakan nilai nodal untuk potensial perturbasi, kerapatan, dan DF untuk setiap element.

Pada fungsi bentuk $G_n, 1 \leq k \leq N_d$ memiliki nilai $G_n(\vec{r}_k) = \delta_k$, dimana δ_k adalah delta Kronecker dan \vec{r}_k adalah posisi pada nodal k .

Hubungan antara potensial perturbasi dan DF:

$$\Sigma_1(r, \theta, t) r dr d\theta = f_1(\vec{\omega}, \vec{J}, t) d^2\vec{J} d^2\vec{\omega} \quad (6)$$

Dengan melakukan substitusi persamaan (5) ke persamaan (2) dalam koordinat polar, dan melakukan perkalian titik dengan $[H_{n'}(r) G_n(r)]$ sebagai bobot galerkin pada hasil persamaan yang akan diperoleh [7]:

$$\begin{aligned} a_n(t) &= C_m \cdot b_n(t) \\ C_m &= -2G \sum_{n=1}^N [A(n') \cdot B(n', n)] \\ A(n) &= \int_{r_n}^{r_{n+1}} G_n^T(r) \cdot G_n(r) dr \\ B(n, n') &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{r'_n}^{r'_{n+1}} dr' \int_{r_n}^{r_{n+1}} R(\epsilon, r, r') G_n(r) \cdot G_{n'}(r') dr \\ R(\epsilon, r, r') &= \sqrt{\frac{r'}{r}} Q_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{\epsilon^2 + r^2 + r'^2}{2rr'} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Berdasarkan pada nilai fungsi bentuk G_n , maka parameter n' harus sama dengan n , agar perkalian titik antara fungsi $G_n(r)$ dengan $G_{n'}(r)$ tidak sama dengan nol.

Pada persamaan (4) dilakukan transformasi koordinat $(r, \theta, v_r, v_\theta) \rightarrow (\omega_r, \omega_\theta, J_r, J_\theta)$, dan menentukan *weak-form* dari persamaan (6), maka akan diperoleh (detail perhitungan dapat ditinjau pada Jalali, 2007):

$$\begin{aligned} p_m &= \sum_{\vec{k}} C_m \cdot F(\vec{k}) \cdot z_k(t) \\ F(\vec{k}, m) &= 4\pi^2 \sum_{n=1}^N [K^{-1}(n) \cdot D(\vec{k}, m, n)] \\ K(n) &= 2\pi \int_{r_n}^{r_{n+1}} G_n^T(r) \cdot G_n(r) r dr \\ D(\vec{k}, m, n) &= \int \Psi_k^T(m, n, \vec{J}) \cdot E_k(n, \vec{J}) d^2\vec{J} \end{aligned}$$

Dengan transformasi yang sama, CBE pada persamaan (1) akan menjadi:

$$0 = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial \vec{J}} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{\omega}} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{J}} \quad (9)$$

Dengan melakukan substitusi dari persamaan (4) hingga persamaan (8) ke persamaan (9), melakukan perkalian titik dengan $[E_k(n, \vec{J}) \exp(-i\vec{k}\vec{\omega})]$, dan mengintegrasikan

dalam ω dan J , maka akan diperoleh persamaan akhir:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} [U_3(\vec{k}, m) \cdot L(\vec{k}, m)] \zeta_k = [U_2(\vec{k}) - \omega_e U_1(\vec{k})] \zeta_k \quad (10)$$

Persamaan (10) merupakan persamaan sistem eigen linier yang cukup mudah dicari solusinya dengan nilai eigen ω_e dan pasangan eigen vektor ζ_k . Matriks U_1, U_2, U_3 , dan L dinyatakan dengan:

$$\begin{aligned} U_1 &= i \sum_{n=1}^N \int E_k^T(n, \vec{J}) \cdot E_k(n, \vec{J}) d^2\vec{J} \\ U_2 &= i \sum_{n=1}^N \int (\vec{k} \cdot \vec{\omega}) E_k^T(n, \vec{J}) \cdot E_k(n, \vec{J}) d^2\vec{J} \\ U_3 &= i \sum_{n=1}^N \int \left(\vec{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{J}} \right) E_k^T(n, \vec{J}) \cdot E_k(n, \vec{J}) d^2\vec{J} \\ L(\vec{k}, m) &= C(m) \cdot F(\vec{k}, m) \end{aligned} \quad (11)$$

3. SIMULASI DAN MODEL

3.1. Parameter

Pada studi ini, kami menggunakan elemen sederhana, $N_d = 2$ dimana tidak ada nodal diantara elemen ke- n dan ke- $(n+1)$. Fungsi bentuk $G_n(r)$ didefinisikan:

$$G_n(r) = \left[\frac{1}{2}(1 - \bar{r}) \quad \frac{1}{2}(1 + \bar{r}) \right]; \quad \bar{r} = \frac{2(r - r_n)}{r_{n+1} - r_n} - 1 \quad (12)$$

Dikarenakan kerapatan pada sistem perturbasi semakin besar ke arah pusat dan menurun secara drastis pada $R \rightarrow \infty$, maka *mesh* yang digunakan merupakan *mesh* tidak seragam agar dapat mempresentasikan struktur piringan dengan baik. Distribusi nodal pada N elemen lingkaran mengikuti:

$$\begin{aligned} r_n &= -\alpha \ln u_n ; \quad n = 1, 2, \dots, (N+1) ; \quad \alpha = 1.5 \\ u_n &= 1 - \frac{1}{2(N+1)} - \frac{n-1}{N-1} \end{aligned} \quad (13)$$

Berdasarkan transformasi koordinat ke polar dan deret Fourier pada bagian $\vec{\omega}$, akan diperoleh:

$$H_n(r) G_n(r) \exp(im\theta) = \sum_{\vec{k}} \Phi_k(n, \vec{J}) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{\omega}) \quad (14)$$

$$\Psi_k(n, \vec{J}) = \frac{1}{4\pi^2} \int H_n(r) G_n(r) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{\omega} - im\theta) d^2\vec{\omega}$$

Sedangkan untuk fungsi interpolasi untuk DF, $E_k(n, \vec{J})$, di asumsikan bahwa $z_k = \exp(-i\omega_e t) \zeta_k$, dimana nilai

eigen ω_e dan eigen vektor ζ_k merupakan solusi dari persamaan eigen linear (10).

$$E_k(n, \vec{J}) = \left(\vec{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{J}} \right) (\vec{k} \cdot \vec{\Omega})^{-1} \Phi_k(m, n, \vec{J}) \quad (15)$$

Parameter $\vec{\Omega} = (\Omega_r, \Omega_\theta)$ merupakan frekuensi orbital didefinisikan sebagai perubahan persamaan Hamiltonian ekuilibrium (H_0) terhadap koordinat aksi (\vec{J}). Aproksimasi komputasi dalam perhitungan $\vec{\Omega}$ [8, 9]:

$$\begin{aligned} \Omega_r(\vec{J}) &= \frac{\pi}{I_0} ; I_k \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2r^2 d\theta}{q^k \cos \theta \sin \theta (r_{max} - r_{min})} \\ \Omega_\theta(\vec{J}) &= \frac{L I_1}{I_0} ; q \\ &= r_{min} \cos^2 \theta + r_{max} \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (16)$$

Vektor angka Fourier yang digunakan $\vec{k} = (k_1, k_2)$ dengan ketentuan $-5 \leq k_1 \leq 5$ dan $k_2 = m$. Pengambilan batas vektor angka Fourier berdasarkan studi dimana batas tersebut merupakan nilai paling efisien pada simulasi N -body piringan galaksi. Untuk parameter m , pada studi ini hanya dibatasi untuk 2 lengan spiral, sehingga $m = 2$ [10].

Dengan penentuan parameter sebelumnya, maka persamaan (10) dapat diselesaikan, dengan solusi nilai eigen ω_e sebagai kompleks frekuensi mode ketidakstabilan galaksi, dan secara simultan, vektor eigen ζ_k juga dapat diperoleh. Dengan mengetahui nilai ω_e dan ζ_k , maka nodal DF z_k dan nodal kerapatan permukaan b_n dapat diketahui:

$$z_k = \exp(-i\omega_e t) \zeta_k ; b_n = \sum_{\vec{k}} F(\vec{k}, m) \cdot z_k \quad (17)$$

Setelah kedua parameter nodal diketahui, maka persamaan DF f dan kerapatan permukaan Σ_1 pada persamaan (4) dan (5) dapat dikonstruksi secara sempurna.

3.2. Model

3.2.1. Mestel Model

Model Mestel merupakan salah satu model pertama yang diusulkan menjadi model piringan galaksi. Persamaan potensial gravitasi-diri ekuilibrium, dan DF ekuilibrium [11]:

$$\Phi_0(r) = v_0^2 \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) ; v_0^2 = 2\pi G \Sigma_s$$

$$f_0(E, L) = \frac{\Sigma_s (\gamma + 1)^{1+\gamma/2}}{\sqrt{2\gamma} \sqrt{\pi} r_0^\gamma v_0^{\gamma+2} \Gamma \left[\frac{1}{2} (\gamma + 1) \right]} L^\gamma \exp \left(\frac{(1-\gamma)E}{v_0^2} \right)$$

dan persamaan reduksi DF:

$$f_{cut}(E, L) = f_0(E, L) \frac{L^{M_{in}}}{[L^{M_{in}} + (r_0 v_0)^{M_{in}}]} \quad (18)$$

dimana Σ_s adalah factor normalisasi, r_0 adalah skala Panjang, v_0 adalah kecepatan bintang pada orbit melingkar, L adalah momentum sudut, E adalah energi Hamiltonian, dan fungsi Γ merupakan fungsi gamma. Reduksi DF untuk memastikan bintang dengan $L \ll r_0 v_0$ tidak akan mempengaruhi kerapatan perturbasi Σ_1 walaupun masih diperhitungkan untuk potensial gravitasi-diri piringan.

Untuk mempermudah simulasi tanpa mengurangi arti fisisnya, digunakan $r_0 = v_0 = G = 1$, dan model yang digunakan dengan parameter $(M_{in}, \gamma) = (4, 6)$.

3.2.2. Piffl Model

Model Galaxy Piffl merupakan galaksi model yang ditentukan berdasarkan survei pengamatan. Pembangunan model galaksi berdasarkan data dari survei *RAVE*. *RAVE* (*Radial Velocity Experiment Survey*) merupakan proyek pengamatan untuk mempelajari formasi dan evolusi galaksi [12]. *RAVE* berfokus mengamati kecepatan radial bintang untuk mempelajari gerak bintang pada piringan dan halo Galaksi Bima Sakti. Piffl telah melakukan *fitting data* secara statistik, seperti: estimasi *maximum likelihood* untuk mendapat model yang sesuai dengan data observasi. Persamaan DF ekuilibrium untuk model Piffl dinyatakan dalam:

$$\begin{aligned} f_0(J_r, L) &= \frac{\Omega_r \Sigma_d}{\pi \sigma_r^2} \exp \left[\frac{J_r}{\sigma_r^2(r_c)} \right] \\ \Sigma_d(r) &= \Sigma_{d0} \left[\exp \left(-\frac{r}{r_d} \right) - \eta \exp \left(-\frac{r}{r_{d\eta}} \right) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r(r) &= \sigma_{r0} \left[0.1 + \left(\frac{\Sigma_d(r)}{\Sigma_d(r_\odot)} \right)^q \right] ; H_{cut} \\ &= \tanh \left(\frac{L}{L_0} \right) \end{aligned}$$

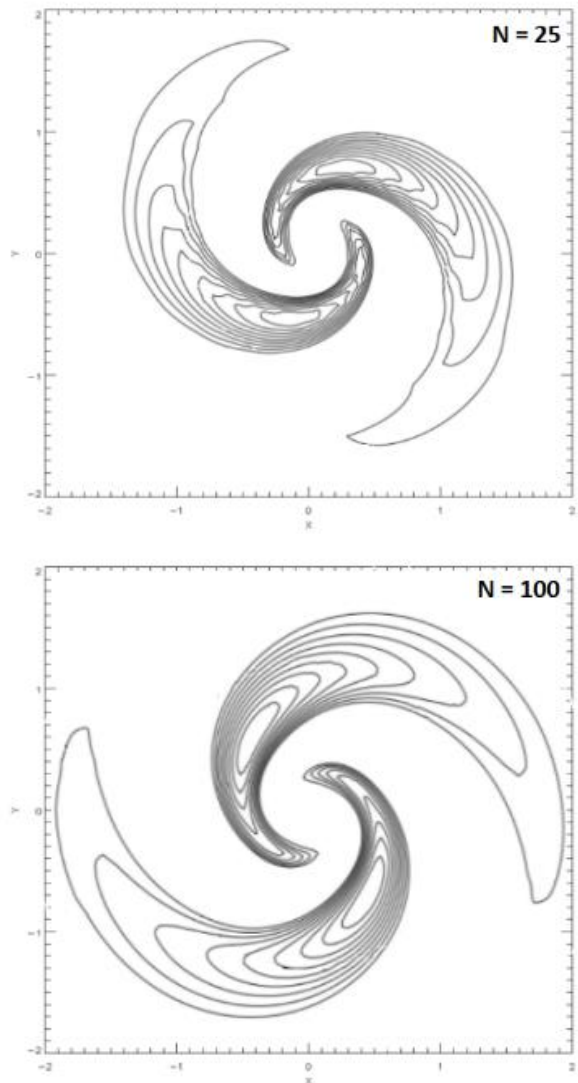
dengan jarak Matahari $r_\odot = 8 \text{ kpc}$, kerapatan permukaan pada jarak Matahari $\Sigma_{d0} = 47 M_\odot \text{ pc}^{-2}$, $\eta = 0.4$, Panjang skala $r_d = 3 \text{ kpc}$ dan $r_{d\eta} = 1 \text{ kpc}$, parameter $q = 0.35$, $L_0 = 60 \text{ km s}^{-1}$, dan dispersi kecepatan bintang $\sigma_{r0} = 27.3 \text{ km s}^{-1}$. Potensial gravitasi-diri ekuilibrium mengikuti:

$$\Phi_0(r) = -\pi G r \Sigma_d [I_0(\gamma) K_1(\gamma) - I_1(\gamma) K_0(\gamma)] \quad (20)$$

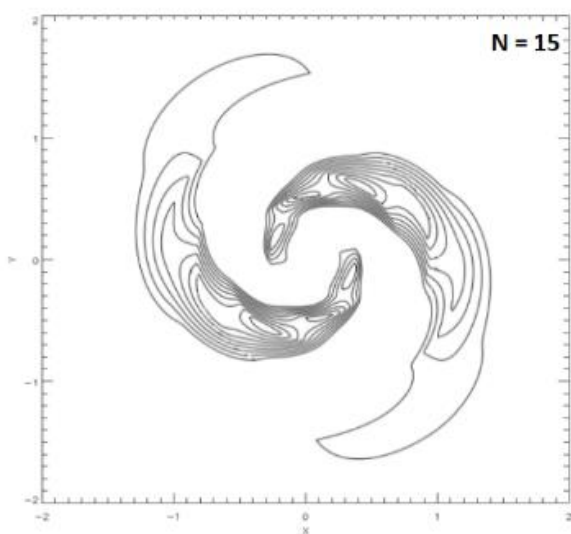
dimana $y = r/(2r_d)$, I dan K merupakan fungsi Bessel, dan konstanta gravitasi $G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$. Dikarenakan pada model ini menggunakan data pengamatan dengan satuan fisika pada umumnya, hasil mode ketidakstabilan merupakan pasangan kecepatan sudut dengan satuan $\text{km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$.

4. HASIL DAN DISKUSI

Penyelesaian pada persamaan (10) merupakan hasil utama pada studi ini. Solusi nilai eigen ω_e merupakan frekuensi kompleks dengan persamaan $\omega_e = \Omega_p + is$, dimana Ω_p adalah *pattern speed* yang menunjukkan kecepatan lengan spiral dalam arah radial dan *growth rates* menunjukkan kecepatan evolusinya. Pada normalnya, persamaan (10) memiliki banyak solusi nilai eigen, akan tetapi pada studi ini, hanya akan ditampilkan nilai ekstrim untuk nilai eigen, yaitu nilai maksimum dan nilai minimum. Nilai maksimum kemudian akan dinamakan sebagai mode 1 atau mode fundamental. Sedangkan untuk nilai minimum kemudian dinamakan sebagai mode 2 atau *secondary mode*. Berdasarkan arti fisis dari frekuensi kompleks, maka semakin besar nilai ω_e , maka mode tersebut semakin tidak stabil. Dapat dikatakan bahwa mode 1 merupakan mode paling tidak stabil atau cenderung akan berubah jika ada gangguan. Selain nilai eigen, kami juga akan menyajikan kontur dari kerapatan perturbasi $\Sigma_1(r, \theta, 0)$ dari 10% hingga 90% dari nilai maksimum, dengan perbedaan setiap konturnya 10%. Kontur ditampilkan dalam koordinat-xy dalam koordinat kartesian dengan definisi $x = r \cos \theta$ dan $y = r \sin \theta$. Pada model Mestel, kami akan meninjau keberhasilan program FEM dan menentukan banyaknya N element yang dapat menghasilkan kontur yang halus. Banyak elemen yang digunakan adalah $N = 15, 25, 100$.



Gambar 1. Kontur kerapatan untuk model Mestel (a) $N = 15$, (b) $N = 25$, (c) $N = 100$

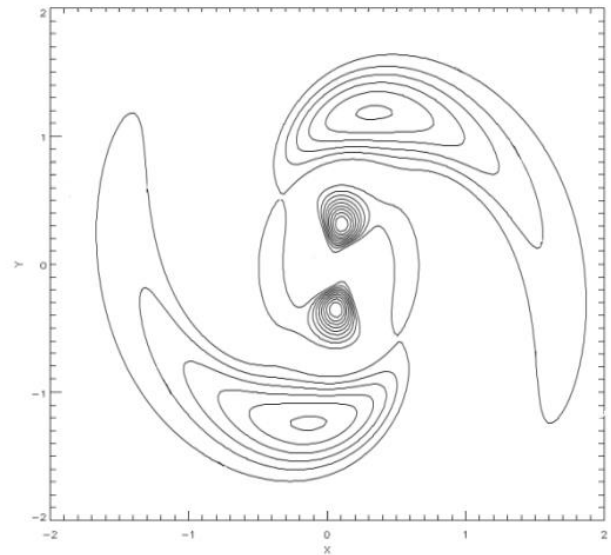
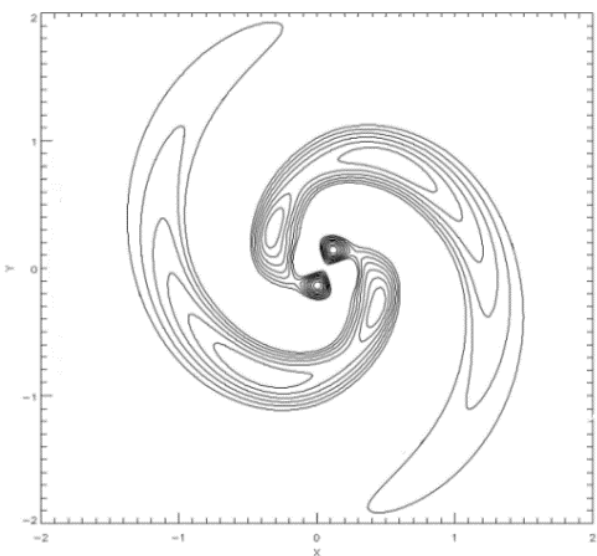


Terlihat pada Gambar 1 bahwa jika N kecil, maka terlihat adanya patahan pada kontur, sedangkan untuk $N = 100$, kontur yang dihasilkan dapat dipresentasikan dengan baik. Pada tabel 1 merupakan rangkuman hasil pasangan frekuensi kompleks untuk kedua model dan perbandingan dengan literatur pada studi sebelumnya. Untuk model Mestel, literatur yang diambil merupakan hasil perhitungan Zang (1976) yang dipublikasikan oleh Toomre (1977). Hasil yang diperoleh untuk FEM sangat mendekati dengan literatur, sehingga untuk model Piffel, elemen yang digunakan adalah $N = 100$.

Tabel 1. Hasil Nilai ω_e pada kedua model

Model	(N, N_d)	mode	Hasil		Literatur	
			Ω_p	s	Ω_p	s
Mestel	(15, 2)	-	0.445	0.176	0.439	0.127
	(25, 2)	-	0.443	0.130	0.439	0.127
	(100, 2)	-	0.430	0.127	0.439	0.127
Piffi	(100, 2)	1	152	7	-	-
	(100, 2)	2	60	11	-	-

Tidak seperti pada model Mestel, pada model Piffi, kami tidak menemukan adanya literatur yang membahas mode ketidakstabilan model Piffi. Model Piffi lebih sering digunakan untuk pemodelan pada halo Galaksi. Gambar 2 merupakan kontur Σ_1 model Piffi untuk mode 1 pada panel atas dan mode 2 pada panel bawah. Hal yang paling menarik pada hasil studi ini adalah profil lengan spiral pada mode 2 model Piffi. Untuk mode 1, kami mendapatkan profil yang sejenis untuk model piringan lain, seperti model isokron dan model piringan eksponensial, akan tetapi pada mode 2, profil yang ditemukan tergolong baru, dimana struktur pusat tidak terlihat pada model lainnya. Pada studi simulasi N-body *triggered spiral modes* pada piringan galaksi. Model eksponensial terpusat (modifikasi dari model eksponensial) sebagai input, dan melakukan simulasi bagaimana evolusi lengan spiral terhadap mode tersebut. Salah satu tahapan evolusi yang terjadi, kontur kerapatan permukaan mempunyai struktur yang hampir sama dengan hasil kontur kami pada model Piffi mode 2 dengan nilai $(\Omega_p, s) = (0.158, 0.027)$ pada satuan unit. Hasil ω_e untuk mode 2 cukup kecil, dapat kami asumsikan bahwa Galaksi Bima Sakti cukup stabil.

**Gambar 2.** Kontur kerapatan untuk model Piffi (a) mode 1, dan (b) mode dua.

5. KESIMPULAN

Pada studi ini, kami menggunakan FEM untuk mengetahui mode ketidakstabilan dari piringan galaksi, sehingga evolusi galaksi dapat dipelajari lebih lanjut. Dengan menggunakan model Mestel sebagai tolak-ukur keberhasilan pertama untuk performa FEM, dan pengujian terhadap model Piffi, dapat kami simpulkan bahwa FEM merupakan metode yang baik untuk mempelajari mode ketidakstabilan piringan galaksi.

REFERENSI

1. A. J. Kalnajs, *The Astrophysical Journal*, 212: 637-644, 1977.
2. A. J. Kalnajs, *IAU Symp.* 77:113, 1978.
3. A. Toomre, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 15:437-478, 1977.
4. E. V. Polyachenko, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 357:559, 2005.
5. J. Binney and S. Tremaine., *Galactic Dynamics*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2nd edition, 2008.
6. N. W. Evans & J. C. A. Read, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 300, 83, 1998a.
7. M. A. Jalali. *The Astrophysical Journal*, 669:218-231, 2007.
8. M. A. Jalali. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 404:1519-1528, 2010.
9. Piffi et al. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 000:1-20, 2014.
10. S. De Rijcke and Voulis I. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 456: 2024-2040, 201

Received: 09 Apr 2019, Accepted: 17 May 2019